

Po ogłoszeniu wyników poszliśmy z Leszkiem Herdegenem, z którym się wtedy przyjaźniłem, do jego domu. Usiedliśmy w jego gabinecie i starszka niania wniosała kotlety schabowe. W jednej chwili olśnił mnie pomysł, żeby zemścić się za długie lata udręki szkolnej. Podzieliłem się tym pomysłem z Herdegenem, który ochoczo nań przystał. Gdy tylko niania odeszła, zostawiając nakrycia na stole, natychmiast pochwyliśmy nasze zeszyty do matematyki, już bezwartościowe, naszym zdaniem, i odbiliśmy na kartkach tłuste plamy z kotletów. To miała być ta nasza zemsta. Chciałoby się rzec, że wolność niejedno ma imię.

Podobny stosunek do matematyki opisuje Siwek [Siwek], przytaczając wspomnienia Kiry Gączyńskiej.

### Trzy typy rozumienia pojęć matematycznych

Turnau [Tur] wyróżnia trzy typy rozumienia matematyki przez uczniów:

- **Rozumienie instrumentalne**

To rozumienie regułek – na przykład przy rozwiązywaniu równania kwadratowego uczeń wie, że trzeba obliczyć deltę i skorzystać z gotowych wzorów. To najczęstszy sposób rozumienia matematyki przez uczniów. Niestety, coraz bardziej celem szkolnej matematycznej maszyny edukacyjnej jest rozumienie instrumentalne; dowodem tej tendencji jest duża liczba zadań testowych oraz pojawienie się nowego typu zadań maturalnych – przedstawia się w nich jakiś typ zadania obudowany krótką teorią, a następnie przedstawia się kilka zadań na zastosowanie tej teorii. Popatrzmy na przykład zaczerpnięty ze zbioru zadań Kietbasy<sup>41</sup> [Kiet1].

*Twierdzenie. Jeśli  $x_1, x_2, x_3$  są pierwiastkami równania  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , to  $x_1x_2x_3 = -d$ ,  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = c$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 = -b$ . Wiedząc, że równanie  $x^3 - 9x + 4 = 0$  ma trzy pierwiastki rzeczywiste:*

- oblicz sumę jego pierwiastków;*
- oblicz iloczyn kwadratów jego pierwiastków;*
- oblicz sumę odwrotności jego pierwiastków;*
- ustal, ile ma dodatnich pierwiastków.*

<sup>41</sup> Kietbasa Andrzej, *Matura z matematyki 2010 - ..., część I*, Wydawnictwo 2000, zadanie 325 (2009).

Zauważmy, że zadanie to ma elementy rozumowania (punkty c oraz d), ale jednak kluczowe jest w nim rozumowanie instrumentalne.

- **Rozumienie intuicyjne**

Uczeń patrząc na równanie kwadratowe zapisane w postaci  $(x - 1)(x + 1) = 0$ , wie, że nie powinien przedstawiać tego równania w postaci ogólnej, obliczać deltę i następnie pierwiastki. Intuicja w rozumieniu jest nie do przecenienia. Jeśli uczeń, obliczając prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia, otrzyma wynik, liczbę większą niż 1, i nie odrzuci tego wyniku, to oznacza to brak ugruntowanych intuicji związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa.

- **Rozumienie logiczne**

W rozumieniu logicznym istotne jest przeprowadzanie dowodów, dedukcja. Przytoczone zadanie (przykład rozumowania instrumentalnego) można przerobić na zadanie, gdzie rozumowanie logiczne jest jego istotą – zadaniem ucznia byłoby wyprowadzenie wzorów Vieta dla równania trzeciego stopnia. Należy jednak pamiętać, że rozumowanie logiczne nie oznacza umiejętności symbolicznego, formalnego zapisywania dowodów. Umiejętność poprawnego formalnego (symbolicznego) zapisu to wyższy szczebel rozumowania logicznego, nieosiągalny dla wielu uczniów. Napisałem nieosiągalny, bo wiem, że aby uczniowie wspięli się na ten szczebel, nauczyciel musi w to włożyć sporo wysiłku i czasu. Poza tym w szkole uczniowie, którzy w przyszłości będą się zajmować matematyką, fizyką czy informatyką jako naukowcy, to znikoma część wszystkich uczniów, więc być może nie ma potrzeby aż tak naciskać na zapisy formalne matematycznych rozumowań.

Podane trzy typy rozumienia powinny pojawić się w szkole na każdym etapie edukacyjnym; rozumienie instrumentalne i intuicyjne dominuje oczywiście w szkole podstawowej, rozumienie logiczne też powinno się pojawić na tym poziomie, ale raczej w formie werbalnej.

### Wartość dydaktyczna błędów

Trudności uczniów w uczeniu się matematyki i problem błędów pojawiły się w rozdziale nieprzypadkowo. Błędy uczniów wynikają z trudności uczniów w uczeniu się matematyki, czasami ze złych podręczników, zbiorów zadań, ogólnie wykorzystywanych materiałów, ale także niestety z niekompetencji i błędów nauczycieli. Zaryzykuję jednak stwierdzenie, że błędy w procesie nauczania są potrzebne,